

C^* -algebry
Lista 3

Zad 1 (Twierdzenie Gelfanda-Mazura). Pokazać, że jeżeli A jest zespoloną algebrą Banacha z dzieleniem, tzn. A posiada jedynkę oraz $A \setminus \{0\} = \text{Inv}(A)$, to A jest izometrycznie izomorficzna z $\mathbb{C}$.

Zad 2. Wyznaczyć wszystkie charaktery oraz ideały maksymalne dla algebry $A = M_n(\mathbb{C}) \oplus M_m(\mathbb{C})$ będącą sumą prostą algebr macierzy, gdzie $n, m > 1$.

Zad 3. Pokazać, że w dowolnej algebrze Banacha z jedynką, każdy ideał właściwy zawiera się w ideale maksymalnym.

Zad 4. Pokazać, że dla dowolnej grupy G algebra grupowa $\ell^1(G)$ wraz z inwolucją daną wzorem

$$a^*(g) := \overline{a(g^{-1})}, \quad a \in \ell^1(G), g \in G,$$

jest $*$ -algebrą Banacha, ale nie jest C^* -algebrą (o ile $|G| > 1$).

Zad 5. Pokazać, że dla dowolnej przestrzeni Hilberta algebra operatorów ograniczonych $B(H)$ wraz z normą operatorową oraz inwolucją daną przez sprzężenie operatorowe jest C^* -algebrą.

Zad 6. Pokazać, że operator $P \in B(H)$ jest *rzutem ortogonalnym* (na swój obraz $M = PH$) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$P^2 = P \text{ oraz } P = P^*.$$

Zad 7. Pokazać, że operator $U \in B(H)$ na przestrzeni Hilberta H jest *izometrią* wtedy i tylko wtedy, gdy zachowuje iloczyn skalarny wtedy i tylko wtedy, gdy $U^*U = 1$.

Zad 8. Pokazać, że dla $U \in B(H)$ jest *operatorem unitarnym* (bijekcją zachowującą iloczyn skalarny) wtedy i tylko wtedy, gdy U jest odwracalną izometrią wtedy i tylko wtedy, gdy $U^*U = UU^* = 1$.

Zad 9. Pokazać, że dla dowolnego elementu $u \in A$ w C^* -algebrze następujące warunki są równoważne:¹

- a) u^*u jest idempotentem (rzutem)
- b) $uu^*u = u$
- c) $u^*uu^* = u^*$
- d) uu^* jest idempotentem (rzutem)

Operator u spełniający powyższe równoważne warunki nazywamy *częściową izometrią*.

Zad 10. Pokazać, że operator $U \in B(H)$ na przestrzeni Hilberta jest częściową izometrią wtedy i tylko wtedy, gdy jest izometrią na dopełnieniu ortogonalnym swojego jądra, tzn. gdy $U : \ker(U)^\perp \rightarrow UH$ jest operatorem unitarnym. Na jakie przestrzenie rzutują wtedy operatory U^*U oraz UU^* ?

Zad 11. Sprawdzić, że operator $u = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$ jest częściową izometrią na przestrzeni Hilberta $\mathbb{C}^2$, ale u^2 już częściową izometrią nie jest.

Zad 12. Pokazać, że iloczyn uv dwóch częściowych izometrii jest częściową izometrią wtedy i tylko wtedy, gdy rzuty u^*u oraz vv^* komutują.²

¹Hint: W dowodzie a) $\Rightarrow$ b) zastosować C^* -równość do $z = uu^*u - u$

²Hint: Dowód "tylko wtedy" nietrywialny, patrz np. I. Erdelyi, *Partial isometries closed under multiplication on Hilbert spaces*, J. Math. Anal. Appl. 22 (1968), 546–551.